Claude Bruter

DES MATHÉMATIQUES ET DES ARTS

Permettez-moi tout d'abord de remercier Antoine Mandel de m'avoir invité à participer à ce colloque. Antoine Mandel s'intéresse à ce problème délicat et pertinent, celui de la compréhension, de l'analyse des transformations socio-économiques. L'étude concerne d'abord diverses catégories d'objets localisés dans l'espace-temps, le terme «objet» étant pris dans un sens très général, puis celle de leurs transformations proprement dites. Les organisateurs partagent l'intuition que les procédés techniques et intellectuels propres à l'étude et à la création d'une classe particulière d'objets, les objets artistiques, ont quelque valeur de généralité, et donc que l'emploi de ces procédés, au moins comme outils premiers, peut enrichir, éventuellement seulement localement, la manière d'aborder et de traiter le problème général qui est posé. Ce qui valide *a priori* cette démarche est le fait que l'activité artistique est une sorte d'universel de l'activité des hommes, sinon sans doute du règne animal. On pratique aussi bien l'art de la médecine, que l'art culinaire, que l'art littéraire, que l'art des mathématiques, que l'art pictural ; chaque art a ses fleurons, les grands patrons, les grands chefs, les grands écrivains et prix Nobel, les grands mathématiciens et médaillés Fields, les grands peintres. Tous ces arts ne sont pas étrangers les uns aux autres, bien au contraire : ils partagent en effet des propriétés générales communes, d'ailleurs faciles à identifier et à mettre en évidence. Nous allons ici brièvement les rappeler, elles ont déjà fait l'objet de présentations au cours de conférences antérieures.

Quelques propriétés générales communes aux œuvres d'art

Convenons d'abord d'appeler «art» toute activité humaine d'excellence et exemplaire en un domaine particulier, artiste celui qui pratique une telle activité, œuvre d'art le résultat de cette activité. Les œuvres d'excellence ont en commun six caractéristiques auxquelles on peut donner les noms de *Représentation*, de *Perfection*, d'*Inventivité*, de *Singularité*, d'*Universalité*, et de *Phénomènes ondulatoires*. Ces caractéristiques seront ici très rapidement illustrées par des exemples empruntés au domaine artistique, plus précisément à celui des arts plastiques.

– Que, pour des raisons de stabilité spatio-temporelle, l'activité première passive ou active des objets et notamment des êtres vivants soit celle de la *représentation* de leur environnement comme de leur milieu intérieur, est un fait majeur qui mérite d'être souligné.

– Que les artistes et les mathématiciens s'emploient à réaliser des œuvres les plus *parfaites* possibles est une évidence commune.

– Qu'ils fassent preuve d'*inventivité* dans leurs créations est non moins nécessaire.

– Que de telles œuvres de qualité se distinguent par leur originalité, et apparaissent donc comme *singulières*, fait figure de lieu commun.

– Si l'on identifie *universalité* à stabilité spatio-temporelle, il est clair que les grandes œuvres, mathématiques ou artistiques, ont vocation à présenter cette propriété : le théorème local de Pythagore sera toujours et partout vrai, en l'absence de cataclysme naturel ou artificiel, la Joconde fera partout l'admiration des hommes.

– Enfin, c'est évidemment d'abord par l'intermédiaire de la *lumière* ou/et du *son* que les uns et les autres s'emploient et parviennent à établir leurs représentations, ce qui est plein de conséquences sur le contenu et la manière de fabriquer les œuvres. La notion de représentation est donc ici essentielle, et l'on peut distinguer *a priori* les représentations des objets des représentations de leurs transformations. Mais l'on va s'apercevoir que, dans bien des cas, la création de représentations d'objets fait appel à des jeux de transformations, les mêmes que ceux qui apparaissent dans les évolutions au cours du temps de ces objets.

Les représentations d'objets

• Les supports

Ne seront ici mentionnés pour mémoire que les supports possibles de ces représentations. Leurs propriétés jouent évidemment un rôle très important dans la conception et dans la réalisation des œuvres. Les supports de ces représentations sont toujours matériels. Ils sont bi-ou tri-dimensionnels. Ils sont inertes, rigides comme les pièces de bois, les pierres et les métaux, souvent travaillés, assemblés, ou plus souples comme certaines pâtes ou également les tissus et les toiles, le papier, voire sans doute les futurs écrans d'ordinateur. Ils peuvent être au contraire vivants, alors déformables, comme des neurones et des réseaux de neurones, voire mobiles comme ceux que l'on voit dans les cirques et sur les scènes de théâtre. À chaque type de support est associé un jeu d'outils particuliers, dont l'emploi fait appel à des techniques bien spécifiées, et qui, outre la nature même du support, ses propriétés, ont une place dans l'attractivité des œuvres obtenues à l'aide de ces outils.

• Les formes géométriques, leurs représentations

Sur ces supports apparaît, est inscrite petit à petit, la forme géométrique. Si, hier, la totalité de la main était l'outil principal d'inscription, celle-ci s'accomplit aujourd'hui de plus en plus, à l'aide des seuls doigts, par impression 2D ou 3D.

L'inscription, donnée par des jeux de procédures mathématiques et logique, est calculée, numérisée. Les mathématiciens sont confrontés aux problèmes posés :

– par l'infinité vertigineuse des formes, et donc par celui de leur classification, des outils à découvrir et à mettre en œuvre pour y parvenir ;

– par celui des assemblages et mélanges possibles et acceptables de ces formes selon des critères bien définis ;

– par celui des déformations du contenu de ces assemblages pour obtenir ainsi de nouveaux décors.

Les artistes abstraits, de leur côté, sont alors confrontés au problème de la compréhension et de la maîtrise de ces formes, au problème du façonnage de leurs assemblages et de leurs déformations selon les critères intellectuels et esthétiques qui leur sont propres, ils sont enfin confrontés au problème du choix des palettes colorimétriques, des quantités et profondeurs d'impression, qui donneront tout leur éclat à ces représentations. On dispose de beaucoup de procédés pour obtenir des formes. En voici quatre parmi les plus fréquemment employés aujourd'hui :

1 - Le procédé statique à la Descartes, le plus connu, mis en œuvre par les spécialistes de géométrie algébrique : il utilise des équations, dites polynomiales. Elles donnent *a priori*, sous la forme d'un polynôme égal à zéro, la relation entre les coordonnées (x, y, z, ...) d'un point d'un domaine situé dans un espace multidimensionnel. La résolution de ces équations permet d'obtenir les valeurs de ces coordonnées, et donc de dessiner le domaine. Ainsi, comme nous l'avons tous appris, la résolution de l'équation $y = x^2$ ou encore $y - x^2 = 0$, conduit aux valeurs des coordonnées (x, y) de points du plan situés sur cette courbe bien connue, la parabole.

2 - Le procédé dynamique rigide par récurrence à la Archimède-Fatou : il permet d'obtenir l'état final d'une situation originelle dont l'évolution est régie par un mécanisme stable, et même invariant. Notez qu'on pourrait élargir le champ de cette théorie en supposant le mécanisme moins invariant mais toujours bien contrôlé, et étudier de telles situations. Par exemple à la date n, on connaît la position z_n d'un point d'un espace, représentant disons un type de comportement, l'état d'une situation physique, économique ou psychologique. Le mécanisme rigide, invariant, représenté par la lettre f, permet de définir et de connaître la position z_n+1 du point à la date suivante.

On note $z_{n+1} = f(z_n)$, $z_{n+2} = f(z_{n+1}) = f(f(z_n)) = f^2(z_n)$, etc, $z\infty = f\infty(z_0)$.

Il est des z dont les images successives par le mécanisme f restent confinées à l'intérieur d'un domaine J(f), appelé domaine de Julia rempli associé au mécanisme f. L'ensemble de Julia associé à f est le bord de ce domaine. Il se trouve que ces domaines de Julia, en particulier leurs bords très accidentés, ont des qualités esthétiques assez fascinantes.

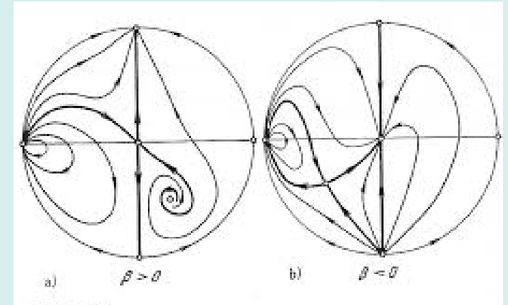
3 - Le procédé dynamique souple à la Newton-Monge mis en œuvre par les spécialistes des systèmes dynamiques et par les géomètres différentiels : une forme quelconque, en un point quelconque, est en général courbée. Parmi les formes locales très voisines au point considéré, la plus simple à décrire et à manipuler est la forme linéaire, se présentant sous l'apparence d'un élément rectiligne tangent à une courbe, d'un élément plan tangent à une surface. Le passage d'un élément tangent au suivant s'accomplit par une transformation locale. L'ensemble de ces transformations locales forment ce que l'on appelle un groupe, ici en général continu, on dit alors que être en présence d'un groupe de Lie. La donnée en chaque point d'un tel élément tangent permet de reconstruire la totalité de la forme. C'est l'approche à la Newton. Au lieu de considérer l'élément tangent, on peut aussi considérer un élément qui lui est perpendiculaire, qu'on appelle l'élément normal à l'élément tangent: c'est une des approches à la Monge. Utilisons l'approche de Newton. L'élément tangent représente la vitesse locale de déplacement z' au point z. Comme cette vitesse, supposée connue, dépend du point z choisi, on écrit z' = h(z). Cette équation s'appelle une équation différentielle du premier ordre. Voici (page ci-contre, en haut), par exemple, selon le point de départ, quelques-unes des différentes courbes que l'on peut obtenir dans un plan (z = (x,y)) en supposant :

$$x' = - x\,(y + 2)$$

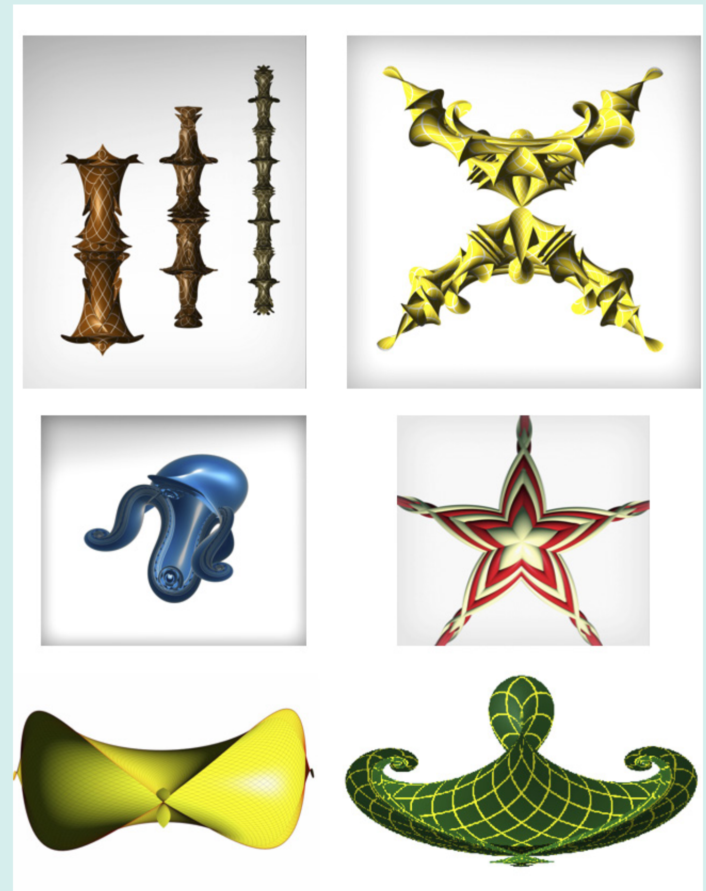
$$y' = x + B\,y$$

La courbure locale en un point étant évaluée selon la normale en ce point, on peut utiliser des procédés à la Monge pour trouver et représenter de nouvelles surfaces, comme celles dites sphériques parce qu'elles ont un courbure totale positive et constante, ou dites pseudo-sphériques dont la courbure totale est également constante mais négative. Les travaux tout récents en ce sens de David Brander[2], mathématicien danois, débouchent sur un nombre impressionnant de formes nouvelles magnifiques en 3D.

4 - Par les procédés précédents, la combinatoire associée à la donnée d'une multitude de nombres et de formules débouche sur la création d'une infinité

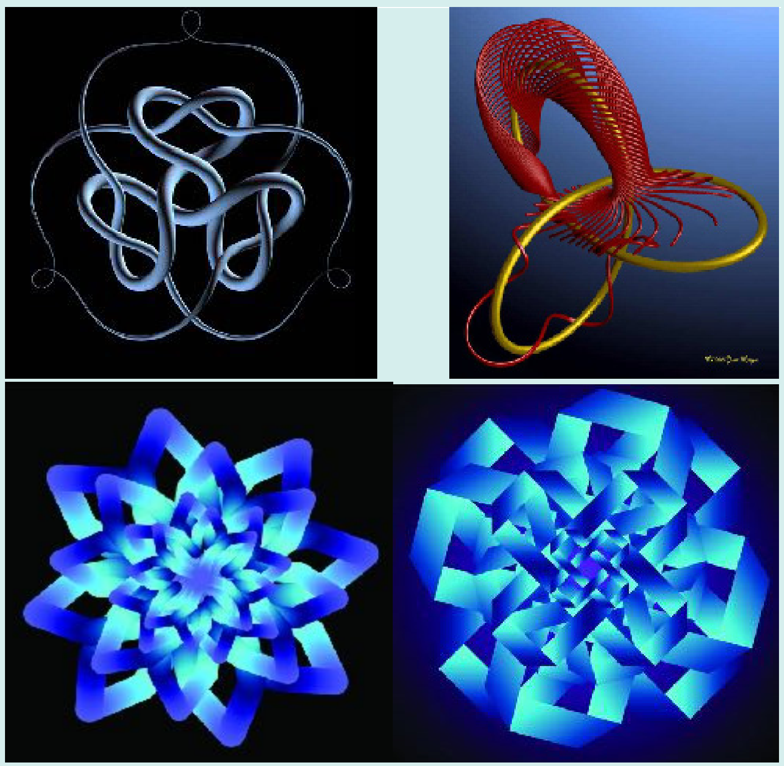


Exemple donné par Andronov-Leontovich-Gordon-Maier..



David Brander. Exemples de surfaces sphériques (Courbure totale positive et constante).

Dmitri Kozlov. *Nœuds magiques..*



De gauche à droite et de haut en bas : Rob Scharein, 2006 – Jos Leys, *Nœud de Trèfle* – Slavik Jablan, *Blue Flower, Neon Flower.*

de formes locales différentes. Mais on ne saurait oublier l'origine proprement physique et/ou géométrique des objets à représenter, et le rôle du mathématicien dans la recherche de ces derniers, dans leur observation et dans la création de leurs représentations.

Voici par exemple une question qui résulte de l'observation du comportement et de tous ses corollaires. Existe-t-il un objet géométrique global correspondant à l'ensemble des directions de l'espace selon lesquelles nous pratiquons nos observations? Cet ensemble de directions forme ce qu'on appelle un espace projectif puisque tout ce qui se trouve sur la trajectoire d'un rayon lumineux rectiligne représentant cette direction est projeté en un seul point. On a trouvé la représentation géométrique de cet espace projectif sous la forme d'une surface inhabituelle qu'on appelle une surface de Boy.

Nœuds et Tores en tant qu'outils de représentation

La vision d'une surface de Boy construite à l'aide d'une armature métallique appelle l'attention sur une autre manière de décrire et de représenter les objets, leurs formes. Elle repose sur la notion générale de tore. Le tore de dimension zéro est un point, il s'identifie à un cercle de rayon nul. Le tore géométrique de dimension 1 peut également être identifié à un cercle, le cercle ordinaire. Plus généralement, nous considèrerons le cercle comme une courbe qui se referme sur elle-même. Dans un espace quelconque, une courbe qui se referme sur elle-même est appelée un nœud. Le nœud le plus simple, après le nœud trivial qu'est le cercle, est le nœud à trois feuilles ou nœud de trèfle. Un tel nœud est par exemple le bord d'un ruban de type Möbius fabriqué à partir d'un simple ruban droit vrillé trois fois et dont on soudé les bords transverses à la direction du vrillage: l'architecte russe Dmitri Kozlov[8] a matérialisé par un fil métallique d'autres nœuds ou 1-tores (voir les figures ci-contre) dans l'espace usuel. Ils représentent des structures stables mais déformables de surfaces, a priori de genre quelconque. Ce sont des nœuds auto-transverses, où un point de croisement dessus-dessous est immédiatement suivi d'un point de croisement dessous-dessus. Ces exemples m'ont conduit à établir cet énoncé : toute surface peut être représentée au moins partiellement par de tels nœuds auto-transverses.

Notez que ce qu'on observe sur ces images sont les projections sur un plan de ces nœuds métalliques présents dans l'espace usuel. En introduisant arbitrairement ou non des points singuliers sur ces projections, on obtient ce qu'on appelle ordinairement un graphe. D'où le problème (q1) : étant donné un graphe, déterminer les conditions qui, remplies, permettent de le relever en un nœud dans un espace de dimension convenable. Aucune difficulté ne se présente bien sûr lorsque le graphe est hamiltonien. On connaît la place occupée par les graphes dans la représentation et dans l'analyse des liaisons socio-économiques. D'où l'intérêt de reconnaître les nœuds associés à ces graphes et de déterminer leur signification.

Les vues de polyèdres évidés dessinées par Léonard de Vinci pour illustrer le célèbre ouvrage du mathématicien *Fra Luca Pacioli* (1445-1517) suggèrent d'introduire la notion de graphe polyédrique, plus généralement sans doute, celle de graphe cristallin, et dont le relèvement dans l'espace usuel est un polyèdre ou un cristal (q2). On peut par ailleurs compléter l'étude des polyèdres par la prise en considération supplémentaire de leurs arêtes intérieures, c'est-à-dire des portions de courbes joignant les sommets et situées à l'intérieur des polyèdres pleins. Le problème suivant (q3), posé fin 2011, est ouvert : un polyèdre étant donné, décrire l'ensemble des nœuds que l'on peut fabriquer à partir de ses arêtes intérieures et des arêtes de son bord ? (On peut imaginer qu'un tel nœud est la « trajectoire » d'un électron dans une sorte de cristal de Wigner).

On peut, dans un premier temps, faire appel à de tels nœuds simples pour traiter le problème posé. Mes contacts avec l'artiste Philipe Rips m'ont conduit à prendre en compte le cuboctaèdre comme premier objet d'étude : il est facile de voir qu'il donne naissance à quatre nœuds de trèfle inclus dans le polyèdre. Cet ensemble résiste à tout tremblement de terre et même à l'aplatissement. Avant de quitter les 1-tores, une remarque sur distinction entre géométrie et topologie, où l'on voit apparaître la notion si importante de déformation. Pour le géomètre, le triangle et le cercle sont deux objets bien différents car le géomètre prend en compte de manière importante toutes les mesures (de longueur, angulaires) qui caractérisent chaque objet. Mais pour celui, appelé le topologue, qui se moque des questions métriques, pour qui la notion plus intrinsèque et plus fondamentale est celle de connexité, le cercle et le triangle sont des expressions du même objet: on se déplace sur le cercle et sur le triangle de la même façon. Cet objet topologique est continûment déformable, et peut se présenter sous l'apparence d'une ellipse que l'on peut elle-même déformer à souhait, d'un carré, d'un polygone.

Une remarque à propos des polygones. La découverte touristique de la quantité étonnante de frises géométriques de toute beauté qui ornent les murs de la chapelle Palatine à Palerme, et, tout proche, de la cathédrale de Monreale, m'a conduit à essayer de faire l'inventaire des motifs présents dans ces frises. Nombre d'entre eux ne sont pas convexes. Si la convexité a depuis longtemps fait l'objet de nombreux travaux, il n'en a pas été de même pour le non-convexité. Or finalement, celle-ci est très présente dans la majorité des objets physiques ou biologiques. J'ai établi un invariant élémentaire qui caractérise le degré de non-convexité des objets. On peut alors ramener l'étude de tout objet usuel à celle d'un polytope, également défini de façon plus générale que l'ordinaire, également pas forcément convexe[6].

Références / Notes

1. A. Andronov, E. Leontovich, I. GORDON, A. MAIER *Qualitative Theory of Second-order Dynamic Systems*, John Wiley et Keter Publishing House, 1973

2. D. BRANDER, http://davidbrander.org/Images/index.html

3. C.P. BRUTER, *Mathématiques et Arts*, Deux Conférences,

Première Partie, Scripta Philosophiae Naturalis, 11 Janvier 2017, 1-27 (https://scriptaphilosophiaenaturalis.files.wordpress.com/2017/01/claude-p-bruter-mathc3a9matiques-et-arts-deux-confc3a9rences.pdf)

Seconde Partie, Scripta Philosophiae Naturalis, n° 12, Juillet-Décembre 2017, 1-12 (https://scriptaphilosophiaenaturalis.files.wordpress.com/2017/06/claude-p-bruter-mathc3a9matiques-et-arts-deux-confc3a9rences-2c3a8me-partie.pdf).

4. C.P. BRUTER, Conférence Suresnes http://www.math-art.eu/Exhibitions/Suresnes2017/Conference_Suresnes.pdf

5. C.P. BRUTER, Conférence École Centrale : http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Ecole_Centrale.pdf

6. C.P. BRUTER, *Sicilian wonders. Insights into the construction of geometric friezes*, in *Mathematics and Art IV*, Cassini, Paris, 2018, 31-81.

7. C.P. BRUTER, *Sur l'Incarnation des Idées-Mères dans les Œuvres d'Art*, http://www.math-art.eu/Exhibitions/Mairie_V_2018/Sur%20l%27incarnation%20...%20copie%202.pdf

8. D. KOZLOV, Kinetic structures of cyclic knots and links as further development of tensegrity principle, Procedia Engineering 165 (2016)1897-1902 (http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Dmitri_Kozlov_Kinetic%20structures-2016.pdf)